Université de Lorraine
Institut Elie Cartan de Lorraine, UMR7502 Mai 2018

SUJET DE THÈSE: PHÉNOMÈNES DE CONCENTRATION POUR DES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES SURCRITIQUES

FRÉDÉRIC ROBERT

Par essence, les questions issues de l'analyse géométrique comportent des invariances naturelles intrinsèques. Par exemple, on peut avoir à l'esprit les invariances de jauge en relativité générale, les invariances galiléennes pour les équations de type Schrödinger ou encore l'invariance sous l'action du groupe conforme pour les applications harmoniques et les équations de prescritption de courbure scalaire. D'un point de vue pratique, les problèmes considérés se ramènent ainsi à une (ou plusieurs) équation aux dérivées partielles invariante sous l'action d'un groupe de transformation. Ainsi, à partir d'une seule solution, on peut en générer d'autres, voire beaucoup d'autres si l'action du groupe est suffisament riche. On peut donc parfaitement se retrouver en présence d'un ensemble de solutions non-compact, ce qui est problématique pour la mise en œuvre de nombreuses méthodes variationnelles ou topologiques.

Plus généralement, on considèrera ici des problèmes qui sont "presque" invariants sous l'action d'un groupe de transformation : l'EDP considérée n'est pas invariante, mais est légèrement perturbée. Du coup, si le groupe de transformation est suffisament riche, alors on aura beaucoup de solutions de l'équation perturbée, voire, et c'est ce qui sera intéressant, des ensembles non-compacts de solutions : on dira alors que l'équation est instable.

Inversement, on peut se demander si toutes les solutions du problème perturbé proviennent de l'action du groupe de transformations : dans ce cas, on dit que la description est en espaces modulaires. Chaque module se concentrant sur une sous-variété du domaine sous-jacent. Les phénomènes d'instabilité et de concentration sont bien compris dans le cas d'équations elliptiques critiques. En particulier, pour une énergie borné, on a la description en espaces modulaires : la concentration a lieu en des points, et elle est modelée sur des solutions de l'équation limite, voir les travaux de Druet-Hebey-Robert [3]. Dans le cas d'équations surcritiques, la question est beaucoup plus difficile. D'une part, les solutions faibles des équations ne sont pas nécessairement régulières et chacune possède un ensemble singulier. D'autre part, une famille de solutions est susceptible de se concentrer non pas sur des points, mais sur des sous-variétés, voire des ensembles moins réguliers : on appellera lieux de concentration ces ensembles. On se trouve donc à gérer ces deux types d'ensemble, l'un étant associé à chacune des solutions étudiées, l'autre aux asymptotiques de la famille de solutions. Ce projet est consacré à l'étude de ces phénomènes de concentration associés. L'objectif est de déterminer comment et où se concentrent des familles de solutions, ce qui permettra d'obtenir de nouveaux critères de stabilité pour les équations surcritiques. En particulier, la complétion de ce projet permettra de comprendre dans quelle mesure les ensembles singuliers des solutions interagissent avec les lieux de concentration de la famille de solutions.

Ce projet ambitieux est séparé en deux parties bien structurées et délimitées, de manière à s'attaquer à une difficulté après l'autre de façon progressive.

Première partie : Problèmes invariants sous l'action d'une groupe d'iso–métries d'une variété Riemannienne. L'invariance sous l'action d'un sous-groupe d'isométries induit un exposant surcritique naturel qui est donné par la dimension de l'orbite minimale sous l'action du groupe d'isométries. Dans le cas trivial d'une action libre et fidèle, le quotient par le groupe est une variété lisse, et on se ramène ainsi de façon artificielle à travailler sur un problème critique en dimension inférieure, cas qui est bien compris. Bien que trivial, ce cas est à garder à l'esprit car il modélise particulièrement bien le cas d'une action générale. Dans le cas général, justement, le quotient est un espace singulier qui n'est pas une variété. Bien qu'il existe une littérature conséquente sur ce type d'espaces, en particulier l'imposant et exhaustif travail de Cheeger [1], les outils classiques ne permettent pas une analyse fine de la concentration. Dans un premier temps, on traitera le cas de familles de solutions positives régulières de type énergie minimale. Là, on utilisera la description énergétique de Santier [6] qui permet d'extraire l'orbite de concentration, à savoir ici une orbite de dimension minimale. Les étapes préconnisées sont alors l'obtention d'une estimée ponctuelle invariante, puis son amélioration jusqu'à obtenir un profil précis. En utilisant alors des identités conformément invariantes, on pourra alors donner des informations sur la localisation et les propriétés qualitatives de l'orbite de concentration. Ce cas d'énergie minimale aura le mérite de poser les difficultées liées à l'invariance par isométries dans un contexte simplifié, ce qui permettra de développer de nouveaux outils spécifiques au cas surcritique avant de se consacrer à d'autres difficultés.

Une fois cette analyse effectuée, on construira des profils se concentrant sur une seule orbite en utilisant la méthode de réduction de la dimension, comme elle est exploitée dans DelPino-Musso-Pacard [2]. Ce travail constructif sera complémentaire de la première étape ci-dessus, et elle permettra de montrer que les critères de localisation des orbites sont optimaux.

Au-delà de ce baby-case qui constitue une entrée en matière raisonnable, on étudiera ensuite le cas d'énergies arbitrairement élevées. La concentration est susceptible de se produire sur plusieurs orbites, et ces orbites peuvent rester éloignées, ou bien encore se rapprocher : la complexité algorithmique par rapport à des concentrations en des points est évidente. Pour cette raison, la seconde étape du travail de thèse sera l'étude de la concentration sur deux orbites : ce cas est suffisament riche pour donner une bonne vision du cas d'un grand nombre d'orbites. Une fois que le cas de deux orbites sera réglé, le cas général ne posera pas de problème. Comme dans le cas minimal d'une orbite, on obtiendra des informations sur les lieux de concentration.

Deuxième partie : Petits exposants surcritiques dans le cas général. Comme écrit plus haut, la première difficultée est que les solutions faibles peuvent ne pas être régulières et posséder un ensemble singulier. Encore faut-il s'entendre ici sur la notion adéquate de solution faible : nous prendrons ici les notions utilisées dans les articles de Pacard [5] et Wang-Wei [7]. L'ensemble singulier évolue alors et peut très bien s'accumuler sur un ensemble qui n'a rien à voir avec le lieu de concentra- tion. Ensuite, l'autre difficulté est de "capturer" une échelle adéquate qui donnera le profile limite, et donc un premier lieu de concentration. On préconise ici d'exploiter les techniques développées par Wang-Wei [7] qui permettent justement, du moins pour des exposants surcritiques "assez petits" de détecter un profile limite après changement d'échelle du problème. Tout comme dans la première partie, on étudiera en premier lieu une situation "minimale" et régulière dans laquelle le profil limite ainsi obtenu concentre toute l'énergie, et du coup interdit la présence d'autres profils. On pourra alors effectuer une analyse asymptotique et déterminer des contrôles ponctuels des solutions explosives du problème surcritique. On exploi- tera les méthodes développées dans la première partie (invariance par isométries) afin de faire une description précise du profil. Ceci permettra alors, grâce à une analyse plus fine de la concentration, de localiser le lieu de concentration. La difficulté suivante sera, toujours dans le cas d'un profil unique, le cas de solutions irrégulières : ici se greffe un ensemble singulier qui va perturber l'analyse. On exploitera l'analyse de BlowUp de Ghoussoub-Robert [4] afin de combiner l'analyse ponctuelle et la persistence de singularités. L'interaction entre l'ensemble singulier et le lieu de concentration est une question essentielle à laquelle ce travail répondra. Bien évidemment, la dernière étape sera l'étude pour des énergies ar- bitraires. La complexité sera encore plus grande que dans la première partie, et cette étape nécessitera une subdivision du travail en plusieurs cas simplifiés, comme celui de l'existence de deux profiles et de deux ensembles singuliers.

Ce sujet de thèse nécessite un fort investissement dans la littérature existente sur plusieurs thèmes : la structure locale de l'action d'un groupe d'isométries sur une variété Riemannienne, l'analyse de la concentration en exposant critique, l'analyse de l'ensemble singulier d'une solution d'un problème surcritique et les derniers développements en concentration surcritique. Comme écrit déjà plus haut, à l'issue de ce projet, l'étudiant(e) en thèse aura développé des méthodes de pointe pour comprendre les phénomènes de concentration en surcritique, en particulier en effectuant une analyse extrêmement fine de la localisation des lieux de concentration et de leurs positions relatives par rapport aux ensembles singuliers.

Références

[1] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428–517.

[2] Manuel del Pino, Monica Musso, and Frank Pacard, *Bubbling along boundary geodesics near the second critical exponent*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), no. 6, 1553–1605.

[3] Olivier Druet, Emmanuel Hebey, and Frédéric Robert, *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, Mathematical Notes, vol. 45, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.

[4] Nassif Ghoussoub and Frédéric Robert, *Concentration estimates for Emden-Fowler equations with boundary singularities and critical growth*, International Mathematics Research Papers **2006** (2006), no. 2187, 1– 86.

[5] Frank Pacard, *Partial regularity for weak solutions of a nonlinear elliptic equation*, Manuscripta Math. **79** (1993), no. 2, 161–172.

[6] Nicolas Saintier, *Asymptotic in Sobolev spaces for symmetric Paneitz-type equations on Riemannian manifolds*, Calc. Var. Partial Differential Equations **35** (2009), no. 3, 385–407.

[7] Kelei Wang and Juncheng Wei, *Analysis of blow-up locus and existence of weak solutions for nonlinear supercritical problems*, Int. Math. Res. Not. IMRN **10** (2015), 2634–2670.

Institut Élie Cartan, Université de Lorraine, BP 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

E-mail address: frederic.robert@univ-lorraine.fr