
PRÉSENTATION DU SUJET DE THÈSE

Proposé par Khalid Koufany

Analyse harmonique d'un hamiltonien à potentiel polynomial Harmonic Analysis of a Hamiltonian with polynomial potential

Soit

$$H = \frac{1}{2}(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) + V(x_1, x_2)$$

le hamiltonien à potentiel polynomial

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2^2 - \frac{1}{3}x_2^3$$

appelé *potentiel de Henon-Heiles* (H est le hamiltonien décrivant le mouvement chaotique de deux étoiles dans une galaxie). On se propose de faire l'analyse de l'équation de Schrödinger

$$-Hu = \frac{\partial u}{\partial t}$$

en utilisant la théorie des représentations des groupes de Lie nilpotents.

La première étape est d'associer à H une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{g} , puis le groupe de Lie G correspondant. Il faut écrire ensuite H comme

$$H = \pi(D)$$

où π est une représentation unitaire de G induite d'un sous-groupe K de G et D un opérateur invariant sur G . La représentation π doit se

décomposer en somme de représentations irréductibles

$$\pi = \int^{\oplus} \pi_s d\mu(s)$$

Une étude préalable du dual unitaire de K est nécessaire.

La deuxième étape est de faire l'analyse des opérateurs $\pi_s(D)$, en particulier déterminer leurs spectres et obtenir un noyau intégral de $e^{-t\pi_s(D)}$. Une fois cette étude faite, après un recollement, on doit déterminer e^{-tH} et trouver une solution fondamentale de l'équation de Schrödinger.

Cette équation est beaucoup étudiée en EDP avec des méthodes numériques. On propose ici une étude basée principalement sur la théorie des représentations.

Références

- [1] Jorgensen, P. E. T.; Klink, W. H. Quantum mechanics and nilpotent groups. I. The curved magnetic field. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 21 (1985), no. 5, 969–999.
- [2] Kirillov, A. A. Lectures on the orbit method. Graduate Studies in Mathematics, 64. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xx+408

version 1, 15 mai 2018

PROPOSÉ PAR KHALID KOUFANY, Institut Élie Cartan, Mathématiques, UMR 7502, Université de Lorraine, B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
E-mail : `khalid.koufany@univ-lorraine.fr`