Proposition de sujet de thèse

Titre : (en français et en Anglais)

Schémas compacts sur la sphère - Applications à la simulation numérique en climatologie

Encadrant : Jean-Pierre Croisille, Professeur, jean-pierre.croisille@univ-lorraine.fr, Institut Élie Cartan de Lorraine, UMR CNRS 7502 (Metz)
Benoît Daniel, Professeur, benoit.daniel@univ-lorraine.fr, Institut Élie Cartan de Lorraine, UMR CNRS 7502 (Metz)

Mots clés : Schémas compacts – Approximation Hermitienne – Schémas en temps - Grille « Cubed Sphere » - Géométrie effective sur la sphère - Equations de Navier-Stokes – Equations de Saint-Venant

Keywords : Compact scheme – Hermitian approximation – Computational geometry on the sphere - Time scheme – Cubed Sphere grid – Navier-Stokes equations – Shallow Water equations.

Description du sujet :

Version Française

Une méthode de calcul de type différences finies [2,3,4] sur la sphère est etudiée depuis plusieurs années . Cette méthode utilise la grille sphérique appelée *Cubed Sphere*, qui est composée de six cartes locales de type cartésien, correspondant aux six faces d'un cube. Cette grille est couramment utilisée pour des méthodes numériques sur la sphère [1].

Le principe de la méthode numérique considérée est d'utiliser des opérateurs aux différences compacts sur cette grille. Cela est rendu possible par la structure quasi-cartésienne de la Cubed Sphere. On peut ainsi obtenir des approximations de très haute précision aux points de grille comme dans un code de calcul Hermitien sur un rectangle. Tous les calculs se ramènent à des évaluations de dérivées Hermitiennes en contexte périodique. Cette circonstance rend ce contexte de calcul très attractif pour le calcul hautes performances.

Dans la thèse de M. Brachet [5], l'étude du schéma en question a été approfondie dans plusieurs directions :

- Définition d'opérateurs différentiels discrets sur la sphère : gradient, divergence, rotationnel.
- Etude des propriétés de conservation de ces opérateurs.
- Stabilité du schéma proposé en version semi-discrète et totalement discrète.
- Simulation des équations LSWE et SW non linéaires en grand temps physique.
- Etude de cas test pour la climatologie et l'océanographie.

Le but de la thèse proposée est la poursuite des travaux engagés dans les directions suivantes :

- **Solveurs linéaires, schémas en temps implicites** : En deux dimensions, le contexte est celui de l'approximation d'équations de type Saint-Venant (Shallow Water) d'évolution. Le contexte applicatif dans ce cas est celui des équations de la climatologie ou de l' océanographie. L'accent sera mis sur les schémas implicites en temps ainsi que sur les solveurs rapides de type FFT. Il s'agit d'effectuer la marche en temps de facon stable, dans le cas où des echelles de temps differentes interviennent. calcul possible en tirant partie de la structure spécifique de la Cubed Sphere.

- **Algorithmes rapides sur la Cubed Sphere :** En relation avec la méthode précédente, l'utilisation de bases spéciales, de type Harmoniques Sphériques par exemple, bien adaptée à la Cubed Sphere en 3D pourra être entreprise. Ceci concerne en particulier la recherche d'algorithmes rapides associés. D''un point de vue théorique, il s''agit du développement d''une analyse harmonique adaptée à la Cubed Sphere.
- **Zoom numérique sur la Cubed Sphere – Géométrie effective :** On peut considérer de façon naturelle un zoom numérique sur la Cubed Sphere. Il s'agit d'utiliser une transformation conforme afin de zoomer sur une partie de la Cubed Sphere. Les équations à résoudre sont déduites des équations originales et de la transformation géométrique correspondante. Une étude mathématique et numérique de cette méthode doit permettre de comprendre son intérêt potentiel pour la simulation de phénomènes physiques très localisés sur la sphère.
- **Equations de Navier-Stokes incompressibles sur la Cubed Sphere en 3D :** Il s'agit de considérer la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles sur un maillage 3D de type Cubed Sphere multicouches. Une formulation possible est celle de type fonction de courant, comme dans [7].

English Version

A finite difference scheme for problems on the sphere has been introduced and studied in [2,3,4]. This method is based on the *Cubed-Sphere [1]*, a quasi-Cartesian grid composed of six panels matching the faces of a cube. This grid is used by many researchers for mathematical modeling in climatology. The main idea of the numerical method relies on compact discrete differential operators on the Cubed Sphere. This is obtained using the quasi Cartesian structure of the grid. High order accuracy is obtained as in the case of a flat rectangle. In the spherical context all the calculations consist of periodic tridiagonal systems along great circles to solve. This can be done very efficiently at an O(N) cost.
In a recent PhD thesis (M. Brachet, [5]), the following studies have been performed:

- Definition of the discrete spherical operators gradient, divergence, curl. These operators are required to approximate convection problems on the sphere.
- Study of the conservative properties of these operators
- Stability analysis of the scheme in semi-discrete and fully discrete form
- Numerical simulation of the LSWE and SW equations in large physical time.
- Study of test cases in climatology.

Current and future topics of interest for the present research project are the following:

- **Linear solvers, implicit time-stepping schemes**: The general context is the one of the Shallow Water equations in spherical geometry. The physical background are climatology and oceanography. The main point will be on fully implicit time schemes. FFT like algorithms can be used to solve the resulting linear systems.
- **Fast solvers on the Cubed Sphere:** In relation with the preceding method, spherical harmonic interpolation on the Cubed Sphere can be introduced and studied. This concerns in particular fast solvers for fast evaluation of interpolation evaluation on the Cubed Sphere. Note that the

scheme dos not make direct use of spherical harmonics.

- **Numerical zoom on the Cubed Sphere – Computational Geometry on the sphere.** Considering a conformal transformation as a change of variables on the Cubed Sphere seems attractive. Such a transform could make possible a zoom on a very specific area of the sphere, thus allowing to follow very detailed structures occurring on a limited area of the sphere. The definition, geometrical and numerical study of this transform is part of the subject of this thesis.
- **Navier-Stokes equations on the sphere in 3D :** The equations to be considered are the incompressible Navier-Stokes equations in a spherical shell using the Cubed Sphere on different altitude levels. Streamfunction formulation can be used as in [7].

Bibliographie- References

[1] C. Ronchi, R. Iacono and P. S. Paolucci, The Cubed Sphere: A New Method for the Solution of PartialDifferential Equations in Spherical Geometry, J. Comput. Phys., 124, 1996, pp. 93-114.

[2] J.-P. Croisille, Hermitian compact interpolation on the Cubed-Sphere grid, Jour. Sci. Comp., 57,1,2013, pp.193--212.

[3] J.-P. Croisille, Hermitian approximation of the spherical divergence on the Cubed-Sphere, J. Comp. App. Math., 280, 2015, pp. 188—201.

[4] M. Brachet and J.P. Croisille, Numerical simulation of propagation problems on the sphere with a compact scheme. Preprint 2018, submitted.

[5] M. Brachet, Schémas compacts hermitiens sur la sphère - Applications en climatologie et en océanographie numérique, Thèse de doctorat, 2018, université de Lorraine

[6] B. Portelenelle and J.P. Croisille: Numerical quadrature on the Cubed Sphere, submitted.

[7] M. Ben-Artzi, J.-P. Croisille and D. Fishelov: *Navier-Stokes equations in planar domains*, Imperial College Press, 2013.

[8] O. Shamir and N. Paldor : A quantitative test case for global-scale dynamical cores based on analytic wave solutions of the shallow-water equations, Quat. Jour. Roy. Met. Soc., 2016.

[9] K. K. Katta, R.D. Nair and V. Kumar: High-Order Finite-Volume Transport on the Cubed Sphere: 1D Reconstruction Scheme *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 266, p 316–327 Comparison between 1D and 2D Reconstruction Schemes , Mon. Weath. Rev., 2015, 2937—2954.