# PROPOSITION DE SUJET DE THÈSE : LES GROUPOÏDES SUPÉRIEURS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

WOLFGANG BERTRAM

## 1. Description courte

Le sujet qui sera développé dans la suite appartient au domaine des *mathématiques fondamentales*, plus précisement à la recherche des *structures fondamentales sous-jaçentes du calcul différentiel et de la géométrie différentielle*. Il n'aura sans doute pas d'applications immédiates ; mais comme le calcul différentiel, et la géométrie différentielle qui est fondée sur celui-ci, sont à la base de toute la physique théorique, il n'est pas impossible qu'à long terme ces recherches aient des retombées potentiellement importantes.

Au cours du 20-ième siècle se sont développées deux approches novatrices au calcul différentiel, et qui ont fortement influencé mes propres recherches :

(1) l'*analyse non-standard*, qui justifie formellement de travailler avec des quantités "infiniment grandes" et "infiniment petites"[1] ;
(2) l'approche des *foncteurs de Weil* (André Weil, cf. [KMS93]), et la *géométrie différentielle synthétique* (SDG: synthetic differential geometry, Kock, Lawvere et at., cf. [La87, Ko81, Ko10, MR91]), qui justifient de travailler avec des quantités "infinitésimales nilpotentes", du type $\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon \neq 0$.

Dans les deux cas, il s'agit de trouver des concepts généraux qui remplaçent l'utilisation, dans l'approche "classique", des notions de *limite*. Basée sur une série de travaux [BGN04, Be08, Be11, Be13, BeS14], j'ai proposé récemment une approche que j'appelle "Calcul différentiel conceptuel" ([Be15a, Be15b, Be17]) et qui est de nature purement algébrique : le concept-clef de cette approche est celle de *groupoïde supérieur (ou : multiple)* et de *(petite) catégorie supérieure*. Puisqu'il s'agit d'algèbre pure, ces concepts permettent de définir un calcul différentiel "sur des univers discrets", et en particulier sur des univers finis – progrès qui me semble intéressant, sachant que l'univers de certaines théories physiques (quantiques) est plutôt modelisé comme "structure discrète".

Il est facile de définir par récurrence ces groupoïdes supérieurs du calcul différentiel, notées $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(M)$ (où l'ordre $n$ est un entier naturel), mais il est difficile d'analyser et de comprendre leur structure : ce sont des objets d'une grande complexité, chacun étant composé de $2^n$ ensembles, liés entre eux par des lois algébriques, et la dimension de $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}$ croît également de façon exponentielle avec $n$. Ainsi, le sujet de thèse : *analyser et comprendre la structure des groupoïdes* $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(M)$, a de multiples facettes, dont certaines que nous allons décrire dans la suite.

[1] cf. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Analyse_non_standard` ; hyperliens dans la version pdf de ce texte

## 2. Positionnement : cadre scientifique, état de l'art

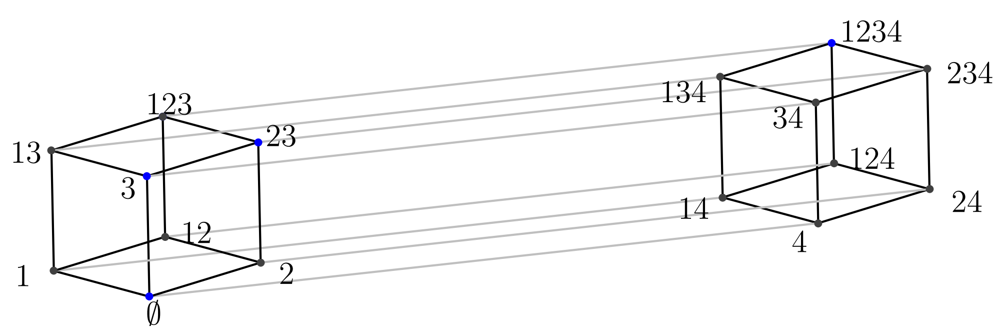
Le passage du concept de *fonction polynomiale* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au concept de *polynôme abstrait* $f \in \mathbb{R}[X]$ est bien connu (et enseigné au niveau Licence). Ce procédé existe aussi pour des fonctions polynomiales de plusieurs variables, voire des fonctions polynomiales $f : V \to W$ d'un espace vectoriel quelconque $V$ vers un autre, $W$ : on passe d'une fonction à une *loi polynomiale* (N. Roby [Ro63]). Enfin, ce passage permet de remplacer $\mathbb{R}$ par un corps quelconque $\mathbb{K}$, ou par un anneau commutatif, incluant le cas de corps et d'anneaux discrets, et finis, si l'on veut.

L'idée du Calcul différentiel conceptuel est de généraliser ce procédé pour passer du concept de *fonction différentiable (lisse)* $f$ à celle d'une *loi différentiable* $(f^{\mathsf{n}})_{n\in\mathbb{N}}$. Cette idée est expliquée dans mes travaux [Be15a, Be15b, Be17], et sera développée plus en détail dans un livre actuellement en préparation.

À destination d'un lecteur mathématicien, j'ai décrit les principes de ce procédé, autre que dans les articles cités ci-dessus, dans deux articles de survol disponbiles sur ma page personnelle, [Be]. En supposant que le présent résumé s'adresse à un lecteur non-mathématicien, je ne vais pas reproduire ici ces explications formelles, mais tenter de les remplacer par des explications en langage courant.

Un polynôme abstrait est une certaine *suite finie* : en une variable, c'est la suite $(a_n)_{n\leq N}$ de ses coefficients ; en plusieurs variables, une suite où chaque $a_n$ est à son tour un objet de plus grande complexité – une application multilinéaire, la composante homogène de degré $n$, ou encore sa "matrice". Dans un premier temps, on remplace les suites finies par des *suites infinies* – ce procédé est bien classique ; on parle de *séries formelles* (le mot "formel" indique qu'il n'est pas question ici de "convergence", ou non, de ces séries). Dans un deuxième temps, je remplace les $a_n$ par des objets d'une complexité encore plus grande : une *loi différentiable* est une suite infinie $(f^{\mathsf{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque $f^{\mathsf{n}}$ est un "fichier attaché" contenant l'information correspondant à une supposée "dérivée d'ordre $n$" de l'objet $f^0$. Pour donner un nom à ce type de fichier : c'est un *foncteur entre* $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(V)$*, le groupoïde d'ordre* $n$ *du domaine de départ* $V$*, vers* $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(W)$*, le groupoïde d'ordre* $n$ *du domaine d'arrivée* $W$. Étudier $f^{\mathsf{n}}$ et étudier la structure de $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}$ sont deux faces de la même médaille : c'est le cœur de ce que j'appelle "calcul différentiel conceptuel".

Dans [Be15b, Be17], je donne une construction simple, par récurrence, des groupoïdes $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(M)$. Chacun d'eux est décrit par un "squelette combinatoire", donné par un *hypercube de dimension n*. Un tel hypercube a $2^n$ sommets. Par exemple, un tesseract (4-cube) est obtenu en "dédoublant" un cube ordinaire (3-cube):



Chaque arête de ce $n$-cube représente un groupoïde "ordinaire", et le squelette (le $n$-cube) décrit le "plan de construction", c'est-à-dire comment les assembler. Dans [Be15b], je donne des algorithmes explicites correspondant à ce plan de construction; mais dès l'ordre 3, la grande complexité des formules qui en résultent impose le développement d'une théorie et d'une compréhension plus globales de ces objets.

Bien que les groupoïdes et catégories supérieures d'ordre $n$ soient un domaine de recherche actuelle très active (en témoigne une activité importante autour du "$n$-lab", voir l'article-clef `https://ncatlab.org/nlab/show/higher+category+theory`, et rendu "populaire" par des articles et le blog de John Baez, cf. `https://ncatlab.org/nlab/show/John+Baez`), il me semble que les questions formulées ci-dessus n'ont pas encore été sérieusement étudiées.[2] Une des raisons en est, peut-être, que le côté purement algébrique des procédés n'a pas vraiment intéressé les chercheurs impliqués dans le $n$-lab, qui restent pour la plupart dans le contexte très général des catégories "larges" et "faibles (non-strictes)". Or, un intérêt principal de l'approche esquissée ci-dessus est précisement que tout est calculable de façon algorithmique.

Finalement, il faut signaler que nos goupoïdes $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(M)$ généralisent le *groupoïde tangent* défini par Alain Connes dans [Co94] qui correspond au cas $n = 1$ (et au cas du corps de base $\mathbb{R}$) ; mais, à ma connaissance, Connes n'a jamais envisagé de généralisations à l'ordre supérieur.

## 3. Pertinence, originalité et objectifs

L'objectif du sujet de thèse sera d'étudier la structure des groupoïdes $\mathsf{G}^{\mathsf{n}}(M)$, avec le but d'identifier des lois algébriques qui encodent des structures du calcul différentiel et de la géométrie différentielle.

(1) Dans un premier temps, mettre au point les algorithmes de [Be15b] (peut-être même les programmer sur ordinateur) pour pouvoir mieux manipuler les structures de petit ordre, par exemple $n \leq 4$.

(2) La complication des formules vient du fait que les "projections but" $\beta$ correspondant aux arêtes sont polynomiales, avec un nombre de termes qui explose avec $n$. Comprendre ces polynômes : par exemple, il semble que la géométrie de l'ensemble des racines de ces polynômes contient une information essentielle – comment l'exploiter ?

(3) Dans [Be15b, Be17] deux "simplifications" de la théorie générale sont proposées : le *calcul symétrique*, et le *calcul simplicial.* Étudier les questions précédentes dans ce cadre "simplifié". L'interprétation du calcul symétrique en termes de groupoïdes supérieurs appelée *edge symmetric* par Brown semble évidente ; par contre, l'interprétation du calcul simplicial en termes de la théorie des catégories supérieures n'est pas claire du tout.

[2] À part le $n$-lab, il existe de nombreuses pages wikipedia sur "higher order category theory", mais pour la plupart elles ne sont pas traduites en français, par exemple `https://en.wikipedia.org/wiki/Higher_category_theory`, et `https://en.wikipedia.org/wiki/Higher-dimensional_algebra`, et `https://en.wikipedia.org/wiki/Double_groupoid` ; la terminologie française ne semble pas encore stabilisée.

(4) Comme pour toute structure mathématique, il convient d'étudier ses *automorphismes*. Il en existe plusieurs sortes – au premier ordre, voir [Be15a] ; généraliser ceci à l'ordre $n$. Question : comment adapter à ce cadre l'observation notée dans [BeS14], Section 5.2 ?

(5) Lié au point précédent, étudier la structure de petite catégorie d'ordre $2n$ obtenue en rajoutant à celle du groupoïde d'ordre $n$ l'action des scalaires. Remarque : il semble que ces petites $2n$-catégories donnent la généralisation correcte, en algèbre supérieure, de l'algèbre linéaire ordinaire (espace vectoriel = groupe additif + action de scalaires).

(6) Vu encore sous un autre angle, les deux points précédents sont liés à l'aspect d'*extension scalaire* : cet aspect a été exploité surtout dans [Be13, Be14] et [BeS14]. Mais l'interaction avec le procédé des groupoïdes supérieurs n'est pas encore claire – y a-t-il un concept algébrique qui les unifie ?

(7) De façon surprenante, toutes les questions précédentes se posent déjà dans le cadre du *scaloid* [3], noté $0^{\mathsf{n}} = \mathsf{G}^{\mathsf{n}}(0)$, qui est la structure supérieure obtenue en partant de l'ensemble "trivial" 0 (espace vectoriel nul : un singleton). Ainsi le sujet de thèse peut être reformulé en : *comprendre la structure du scaloid* $0^{\mathsf{n}}$. L'importance du problème vient du fait que le scaloid est la bonne généralisation à l'ordre $n$ de l'anneau de base $\mathbb{K}$ lui-même.

J'ai eu des échanges avec des spécialistes reconnus en SDG (Anders Kock) et en théorie des groupoïdes (Ronald Brown, Kirill Mackenzie) qui reconnaissent pleinement l'originalité de cette approche ; mais comme cette approche dépasse de très loin les théories existantes, ils sont plutôt en attente que sa forme se stabilise. En effet, il convient de constater qu'il s'agit ici d'une théorie *nouvelle* ; et, comme toute théorie nouvelle, elle rencontre l'obstacle qu'elle ne peut pas s'appuyer sur un réseau et une documentation déjà reconnus par une grande partie de la communeauté scientifique. Ainsi, il serait très important pour moi de recruter un, ou plusieurs, jeunes chercheurs qui travaillent sur ce sujet et qui contribuent précisement à sa formulation et à sa stabilisation.

## 4. Méthodologie ; techniques mises en œuvre ; plan de réalisation ; ressources humaines

Comme pour tout sujet de recherche fondamentale, on ne peut pas "prévoir" les résultats à trouver : le plan de réalisation est désigné par les points (1) – (7) listés ci-dessus ; mais l'issue de chaque étape pourra modifier la progression dans l'une des autres. Par ailleurs, c'est ce qui s'est produit au cours de travail de thèse de mes anciens étudiants Arnaud Souvay (soutenance 2012), Julien Chenal (soutenance 2010) et Manon Didry (soutenance 2006).

Le ou la candidat-e devra avoir des bonnes connaissances et un goût prononcé pour l'algèbre, tout en se servant de l'intuition géométrique fournie par une relative familiarité avec la géométrie différentielle et la théorie des groupes de Lie. Par contre, il faudra compter un certain temps pour acquérir les connaissances de

[3] J'utilise ici la version anglaise de ce terme que j'ai introduit dans [Be15b] ; je ne me suis pas encore décidé quant à la meilleure traduction en français...

base sur les groupoïdes (de Lie en particulier : lecture de [Ma05]), et pour se familiariser avec ce qu'on appelle le "programme d'Ehresmann" : l'œuvre de Charles Ehresmann lui-même est très difficile à lire (cf. [E65]), mais il existe une littérature secondaire très riche (cf. [KPRW07, KMS93]). Il me semble important aussi de connaître et d'étudier les principes de base de la géométrie différentielle synthétique (SDG, [Ko81, Ko10, La87, MR91]), bien que notre approche ne s'inscrit pas dans ce cadre. Par ailleurs, ce sont des sujets que j'ai discutés dans un cours "Concepts géométriques", donné dans le cadre de notre Ecole Doctorale IAEM Lorraine au printemps 2016 (notes disponibles à l'adresse `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Wolfgang.Bertram/WB-coursED.pdf`) ; ce cours pourrait avoir une suite.

Je prévois la première année de thèse pour cette entrée en matière, et pour aborder le point (1) décrit ci-dessus. Coté ressources humaines, j'envisage une collaboration surtout avec les collègues et doctorants messins de l'équipe Analyse et Théorie des Nombres – l'approche catégorielle est centrale au projet ANR (soumis actuellement) *GEMS (Géométrie multisymplectique)*, porté à Metz par Tilmann Wurzbacher, dont je fais partie. Ainsi, nous pouvons envisager des groupes de travail et des séminaires (au niveau local, mais aussi au niveau national) pour aborder ensemble les divers aspects relatifs à la théorie des catégories (supérieures). Le travail de seconde année devait se concentrer sur un travail approfondi sur plusieurs des points (2) – (7) ci-dessus. En fonction des résultats, la troisième année sera dédiée à la rédaction proprement dite de la thèse.

Il va de soi que le candidat participera par ailleurs à la vie du laboratoire et de l'équipe : participation aux séminaires et groupes de travail ; participation au séminaire régional "Strasbourg-Lorraine-Luxembourg-Reims" ($\mathrm{SL}_2R$) et aux journées (Colloque tournant) du GDR "Théorie de Lie Algébrique et Géométrique" dont je fais partie. Aussi, il me semble important qu'il ou elle commencera aussi à faire des expériences d'enseignement, en acceptant une mission d'enseignement (de 64 heures max annuel). Je soutiendrai particulièrement tout effort de le-la candidat-e pour présenter le concours de l'Agrégation, car la combinaison "Agrégation + thèse" est la mieux adaptée aux particularités du système français (qui se caractérise toujours par une certaine méconnaissance de la valeur d'un doctorat, contrairement à d'autres pays, comme l'Allemagne ou les pays anglo-saxons où l'embauche d'un docteur de mathématiques fondamentales dans des entreprises et dans l'économie est tout à fait courant).

## 5. Résultats et impacts scientifiques potentiels

Comme dit au premier paragraphe, il n'y aura sans doute pas d'applications immédiates ; mais des impacts et applications à long terme me semblent non seulement possibles, mais inévitables. En effet, l'utilisation des catégories supérieures vient surtout de la physique théorique – bien que Charles Ehresmann ait proposé ces concepts assez tôt ([E65]), les mathématiciens ont mis beaucoup de temps pour s'y habituer. Or, il me semble que cette utilisation en physique théorique est encore à ses débuts, en stade de "discussion et tâtonnement". Dans une telle situation, toute contribution substantielle peut changer la course des recherches, d'autant plus quand il s'agit d'un sujet aussi fondateur que le calcul différentiel.

## References


[Be08] Bertram, W., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces over General Base Fields and Rings*, Memoirs of the AMS **192**, no. 900 (2008). https://arxiv.org/abs/math/0502168

[Be11] Bertram, W., *Calcul différential topologique élémentaire*, Calvage et Mounet, Paris 2011

[Be13] Bertram, W., "Simplicial differential calculus, divided differences, and construction of Weil functors", Forum Math. **25** (1) (2013), 19–47. http://arxiv.org/abs/1009.2354

[Be14] Bertram, W., "Weil Spaces and Weil-Lie Groups", http://arxiv.org/abs/1402.2619

[Be15a] Bertram, W., "Conceptual Differential Calculus. I : First order local linear algebra" http://arxiv.org/abs/1503.04623

[Be15b] Bertram, W., "Conceptual Differential Calculus. II : Cubic higher order calculus." http://arxiv.org/abs/1510.03234

[Be17] Bertram, W., "Lie calculus", https://arxiv.org/abs/1702.08282 to appear: Proceedings of 50. Seminar Sophus Lie, Banach Center Publications.

[Be] Bertram, W., articles de survol disponibles à l'adresse http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Wolfgang.Bertram/WB-page.pdf et http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Wolfgang.Bertram/WB-PCS.pdf.

[BGN04] Bertram, W., H. Gloeckner and K.-H. Neeb, "Differential Calculus over general base fields and rings", Expo. Math. 22 (2004), 213 –282. http://arxiv.org/abs/math/0303300

[BeS14] Bertram, W, and A. Souvay, "A general construction of Weil functors", Cahiers Top. et Géom. Diff. Catégoriques **LV**, Fasc. 4, 267 – 313 (2014), arxiv: math.GR/1201.6201

[Br87] Brown, R., "From Groups to Groupoids", Bull London Math. Soc., **19** (1987) 113-134 http://pages.bangor.ac.uk/~mas010/pdffiles/groupoidsurvey.pdf

[Co94] Connes, A., *Noncommative Geometry*, Academic Press, San Diego 1994

[E65] Ehresmann, Ch., *Catégories et structures*, Dunod, Paris 1965.

[Ko81] Kock, A., *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes **51**, Cambridge 1981

[Ko10] Kock, A., *Synthetic Geometry of Manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics **180**, Cambridge 2010

[KMS93] Kolar, I, P. Michor and J. Slovak, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer, Berlin 1993.

[KPRW07] J. Krysinski, J. Pradines, T. Rybicki, R. Wolak (eds), *The mathematical legacy of Charles Ehresmann*, Banach Centre Publications **76**, Warsaw 2007.

[La87] Lavendhomme, R., *Leçons de géométrie différentielle naïve*, Institut de Mathématique, Louvain-La-Neuve, 1987.

[LaSch09] Lawvere, W., and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[Ma05] Mackenzie, K., *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[MR91] Moerdijk, I., and G.E. Reyes, *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, New York 1991.

[Ro63] Roby, N., "Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules", Ann. Sci. E.N.S., **80** (1963), 213 – 348.

[W96] Weinstein, A., "Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry", Notices of the AMS **43** (7) (1996), 744–753



Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine at Nancy, CNRS, INRIA, B.P. 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

*E-mail address*: wolfgang.bertram@univ-lorraine.fr